Integralrechnung
Lösungen

ACHTUNG: Die Lösungen wurden nicht auf ihre Richtigkeit überprüft. Wer Fehler findet, meldet diese bei manuela.paschkowski@mathematik.uni-halle.de

1. Aufgabe:

a) Mit der Substitutionsregel (11.13)

$$\int_a^b g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(x)\ dx$$

und $g(x) := x, \varphi(x) := f(x)$ berechnet man

$$\int_a^b f(x)f'(x)dx = \int_{f(a)}^{f(b)} x\ dx = \frac{x^2}{2}\bigg|_{f(a)}^{f(b)} = \frac{f^2(b)}{2} - f^2(a)2$$

Durch Multiplikation mit 2 steht die Formel da.

b) Mit der Regel der partiellen Integration (11.14)

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = (uv)|_a^b - \int u'(x)v(x)dx$$

und $u = f = v$ erhält man

$$\int_a^b f(x)f'(x)dx = (f^2)|_a^b - \int f'(x)f(x)dx$$

Durch Addition des Integrals auf beiden Seiten und Einsetzen von a und b in f^2 erhält man die Formel.

2. Aufgabe:

Untersuchen Sie, ob die folgenden Integrale existieren, und berechnen Sie im Falle der Existenz ihren Wert:

a) Wenn $\alpha = 0$ erhält man

$$\int_0^\infty x^2 dx = \lim_{b\to\infty} \frac{x^3}{3}\bigg|_0^b = \lim_{b\to\infty} \frac{b^3}{3}$$

dass das Integral divergiert (gegen $+\infty$). Für $\alpha \neq 0$ kann man 2mal partiell integrieren und bekommt

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x}dx &= \lim_{b\to\infty} e^{-\alpha x}\left(-\frac{x^2}{\alpha} - \frac{2x}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha^3}\right)\bigg|_0^b \\ &= \lim_{b\to\infty} e^{-\alpha b}\left(-\frac{b^2}{\alpha} - \frac{2b}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha^3}\right) + \frac{2}{\alpha^3}\end{aligned}$$

Da exponentielles Wachstum schneller wächst als polynomielles, konvergiert dieser Limes für $\alpha > 0$ gegen den Wert des Integrals $2/\alpha^3$ und für $\alpha < 0$ divergiert der Limes.

b) Da $ln|x|$ symmetrisch ist, können wir schreiben:

$$\int_{-1}^{1} ln|x|dx = 2\int_{0}^{1} ln(x)\ dx$$

Mit partieller Integration mit $v'(x) = 1, u(x) = ln(x)$ erhält man

$$\begin{aligned} 2\int_0^1 ln(x)\ dx &= \lim_{a\to 0} 2\ x\ln(x) - x|_a^1 \\ &= -2 - \lim_{a\to 0}(2a(ln(a) - 1)) \end{aligned}$$

Der Grenzwert ergibt sich mit L'Hospital zu Null.

c) Mit der Substitution $\varphi(x) = 1/x, g(x) = \sin(x)$ erhält man

$$\begin{aligned} \int_0^{1/\pi} -\frac{\sin(1/x)}{x^2}dx &= \lim_{a\to 0}\int_{1/a}^{\pi} \sin(x)dx \\ &= \lim_{a\to 0} -\cos(x)|_{1/a}^{\pi} = 1 + \lim_{a\to 0}\cos(1/a) \end{aligned}$$

Dieser Grenzwert existiert nicht, da z.B. die Funktionswerte der Nullfolge $a_n = 1/(2n\pi)$ gegen $\cos(1/a_n) \to 1$ konvergieren und der Nullfolge $b_n = 1/((2n+1)\pi)$ gegen $\cos(1/b_n) \to -1$.

d) Für $x \in (0, 1]$ kann man auf den Grenzwert L'Hospital anwenden

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nx}{e^{nx^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{x^2 e^{nx^2}} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{xe^{nx^2}} = 0$$

In $x = 0$ ist nxe^{-nx^2} auch gleich Null, sodass

$$\int_0^1 (\lim_{n\to\infty} n\cdot x\cdot e^{-nx^2})dx = 0.$$

Wenn man aber Grenzwert und Integral vertauscht, resultiert

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 (n\cdot x\cdot e^{-nx^2})dx = \lim_{n\to\infty} -\frac{e^{-nx^2}}{2}\bigg|_0^1 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2} - \frac{e^{-n}}{2} = \frac{1}{2}$$

Man sieht, dass die Funktionenfolge $f_n(x) = nx\cdot e^{-nx^2}$ zwar punktweise gegen $f(x) = 0$ konvergiert, aber nicht gleichmäßig. Daher kann man Integral und Grenzwert nicht vertauschen.

3. Aufgabe:

Antwort c) ist richtig. Der Hauptsatz der Integralrechnung besagt, dass es für $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig eine Stammfunktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $F'(x) = f(x), \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ gibt.
Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung sagt, dass für die stetig differenzierbare Funktion F ein $c \in (a, b)$ gibt mit $F'(c) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$

Potenzreihen
Lösungen

1. Aufgabe:

a) Mit dem Quotientenkriterium für Potenzreihen und $a_k = e^k/(3k)$ berechnet man

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = \lim_{k\to\infty} \frac{e^k 3(k+1)}{3ke^{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1+\frac{1}{k}}{e} = \frac{1}{e}$$

In $x = 1/e$ ist die Potenzreihe äquivalent zu der divergenten Reihe $\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$. Für $x = -1/e$ ist die Potenzreihe äquivalent zu $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{3k}$. Da $1/(3k)$ eine monoton fallende Nullfolge ist, konvergiert die Reihe nach dem Leibnizkriterium.

b) Nach dem Wurzelkriterium für Potenzreihen kann man mit $a_k = (-1)^{k-1}\frac{3^{k-1}}{2^{k+2}}$ berechnen

$$L = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{3^{1-1/k}}{2^{1+2/k}} = \frac{3}{2}, R = \frac{1}{L} = \frac{2}{3}$$

In $x = \pm 2/3$ sind die Potenzreihen äquivalten zu $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{12}$ bzw. $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{2k-1}\frac{1}{12}$. Da hinter dem Summenzeichen keine Nullfolgen stehen, divergieren die Reihen

2. Aufgabe:

Da $e^x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$ folgt

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x}dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!}dx$$

Der Konvergenzradius der Potenzreihe ist $R = \lim_{k\to\infty}\frac{1/(k+1)!}{1/(k+2)!} = \lim_{k\to\infty}(k+2) = \infty$. D.h., die Potenzreihe konvergiert auf den ganzen reellen Zahlen. Nach Satz 13.1. wissen wir aber auch, dass Potenzreihen Funktionenfolgen sind, die für alle $0 < r < R$ auf $(-r, r)$ gleichmäßig konvergieren. Also konvergiert unsere Potenzreihe auf $[0, 1]$ für z.B. $r = 2$ gleichmäßig und wir können Integral und Summe vertauschen

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^k}{(k+1)!}dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+1)!}$$

Da eine konvergente Majorante die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ ist, konvergiert die Reihe bzw. das uneigentliche Integral.

3. Aufgabe:

Die richtige Antwort ist d). Nach dem Hauptsatz der Integralrechnung ist $F(x) = f'(x) = ln(1 + x)$ mit

$$F^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}$$

4. Aufgabe:

a) f ist beliebig oft differenzierbar mit

$$f'(x) = \cos(x) - \sin(x), \qquad f''(x) = -\sin(x) - \cos(x)$$

und $f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = -1$. Also ergibt sich

$$T_2(x;0) = f(0) + \frac{f'(0)}{0!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 + x - \frac{x^2}{2}$$

b) **Behauptung:** Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $|f(x) - T_2(x)| \le \frac{1}{3}|x|^3$.
Beweis: Nach dem Satz für Taylor gilt für alle mind. 3-mal stetig differenzierbaren Funktionen

$$|f(x) - T_2(x;0)| = |R_2(x;0)|$$

mit

$$R_2(x;0) = \frac{f'''(\xi)}{3!}x^3,$$

wobei ξ zwischen x und Null liegt. Hier ist $|f'''(\xi)| = |-\cos(\xi) + \sin(\xi)| \le |\cos(\xi)| + |\sin(\xi)| \le 2$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$. Es folgt

$$|f(x) - T_2(x;0)| = |R_2(x;0)| = \left|\frac{f'''(\xi)}{3!}x^3\right| \le \left|\frac{2}{6}x^3\right| = \frac{1}{3}|x|^3$$

Metrische Räume
Lösungen

MATHEMATIK VERBINDET

Mathe Nacht

1. Aufgabe:

a) Das ist falsch. Seien für $i \in \mathbb{N}$ $U_i = (-1/i, 1/i) \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle. Es gilt aber

$$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} U_i = \{0\}$$

und die einelementige Menge $\{0\}$ ist abgeschlossen

b) Das ist wahr. Sei $M = \{x\} \subset \mathbb{R}^n$ und $(x_n) \subset M$. Dann muss $x_n = x$ gelten und jede Teilfolge $x_{n_k} = x$ ist konstant und konvergiert somit gegen x. Damit besitzt jede Folge aus M eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert in M liegt. Das ist die Definition einer folgenkompakten Menge. In metrischen Räumen (wie $\mathbb{R}^n$ mit einer beliebigen Metrik) ist Folgenkompaktheit identisch mit Kompaktheit.

c) Das ist wahr. Sei $f(x) = \|x\|$ ein beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$, dann ist f stetig, wenn $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$:

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Für ein beliebiges $\epsilon > 0$ gilt für $\delta = \epsilon$ mit der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

die Implikation $\|x - y\| < \delta = \epsilon \Rightarrow$

$$|f(x) - f(y)| = |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| < \epsilon.$$

d) Das ist falsch. z.B. ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $A = (-1, 1)$ ein offenes Intervall. Das Bild $f(A) = [0, 1)$ ist aber nicht offen.

2. Aufgabe:

M_1, M_5 sind offen und M_1, M_5 und M_4 für $n = 1$ sind beschränkt.

3. Aufgabe:

Sei $(x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0)$. Der Zähler ist äquivalent zu der Manhattan-Norm, die nach 1c) eine stetige Funktion ist. Der Nenner ist äquivalent zur eukldischen Norm, die ebenso nach 1c) stetig ist und vor allem in einer Umgebung von (x_1, x_2, x_3) nicht Null ist. Damit ist f nach Korollar 14.16 als Hintereinanderausführung von stetigen Funktionen wieder stetig.
Sei $(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$. Die Punktfolge $(1/n, 1/n, 1/n)$ konvergiert gegen $(0, 0, 0)$ mit

$$f(1/n, 1/n, 1/n) = \frac{3/n}{\sqrt{3/n^2}} = \sqrt{3} \to \sqrt{3}$$

Die Punktfolge $(1/n, 0, 0)$ konvergiert gegen $(0, 0, 0)$ mit

$$f(1/n, 0, 0) = \frac{1/n}{\sqrt{1/n^2}} = 1 \to 1$$

Damit ist f im Nullpunkt nicht stetig.

Kurven(-integrale)

1. Aufgabe:

a) Einheitskreis im $\mathbb{R}^2$ um den Nullpunkt, der mehrmals umrundet wird.

b) Es ist

$$s_f(t) = \int_0^t \|f'(\tau)\|_2 \, d\tau = \int_0^t \left\| \begin{pmatrix} -\sin(\tau^3)2\tau^2 \\ \cos(\tau^3)2\tau^2 \end{pmatrix} \right\|_2 d\tau = \int_0^t 3\tau^2 d\tau = t^3$$

c) Das ist genau die Parametrisierung (Beschreibung) des Kreises, die bei der Ersetzung $s = t^3$ (siehe b)) herauskommt

$$g(s) = \begin{pmatrix} \cos(s) \\ \sin(s) \end{pmatrix}$$

Man erhält immer noch den Einheitskreis (Spur) und der Tangentialvektor hätte immer die Länge 1 (normierte Parametrisierung)

2. Aufgabe:

Nach Abschnitt 15.2.1. ist für eine Kurve $\gamma : [a, b] \to V$ und eine stetige Geschwindigkeitsfunktion $h : V \to \mathbb{R}$

$$\int_\gamma h \text{ d}s := \int_a^b h(\gamma(t)) \, \|\gamma'(t)\|_2 \, dt$$

a)

$$\gamma_1'(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \|\gamma_1'(t)\|_2 = 5, h(\gamma_1(t)) = 16t^2 + 72t^3$$

$$\int_{\gamma_1} h \text{ d}s = \int_{-1}^1 80t^2 + 360t^4 \; dt = \frac{80}{3}t^3 + 90t^4 \Big|_{-1}^1 = \frac{160}{3}$$

b) Da $t \geq 0$

$$\gamma_2'(t) = \begin{pmatrix} 6t \\ 8t \end{pmatrix}, \|\gamma_2'(t)\|_2 = 10t, h(\gamma_2(t)) = -t^2$$

$$\int_{\gamma_2} h \text{ d}s = \int_0^2 -10t^3 \; dt = \frac{-10}{4}t^4 \Big|_0^2 = -40$$

3. Aufgabe:

Nach 15.2. ist ($\cdot$ Skalarprodukt)

$$\int_\gamma F \, \overrightarrow{\text{d}s} := \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$

Man berechnet

$$F(\gamma_1(t)) = \begin{pmatrix} 2t^3 \\ t^2 \end{pmatrix}, \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \Rightarrow \int_{\gamma_1} F \ \mathrm{d}\vec{s} = \int_0^1 4t^3 = 1$$

$$F(\gamma_2(t)) = \begin{pmatrix} 2t^4 \\ t^2 \end{pmatrix}, \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \int_{\gamma_1} F \ \mathrm{d}\vec{s} = \int_0^1 5t^4 = 1$$

Das ist **kein** Zufall. Wenn

$$F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} P(x_1, x_2) \\ Q(x_1, x_2) \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \partial_{x_2} P = \partial_{x_1} Q$$

gilt, erhält man immer den selben Wert für das Kurvenintegral 2. Art, egal welchen Weg man von $(0, 0)$ nach $(1, 1)$ geht. Mehr dazu in Differentialgeometrie!

Differentialrechnung Lösungen

1. Aufgabe:

a) Man berechnet

$$\partial_1 f = \begin{cases} \frac{x_1^4 x_2 + 4x_1^2 x_2^3 - x_2^5}{(x_1^2+x_2^2)^2} & , (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0, & (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

$$\partial_2 f = \begin{cases} \frac{-x_1 x_2^4 - 4x_1^3 x_2^2 + x_1^5}{(x_1^2+x_2^2)^2} & , (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ 0, & (x_1, x_2) = (0,0) \end{cases}$$

Die 2. Ableitungen stimmen nicht überein denn

$$\partial_2 \partial_1 f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\partial_1 f(0,h) - \partial_1 f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-h^5}{h^4} - 0}{h} = -1$$

$$\partial_1 \partial_2 f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\partial_2 f(h,0) - \partial_2 f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^5}{h^4} - 0}{h} = 1$$

b) ☐ Das ist falsch. Denn sonst müsste es eine (totale) Ableitung $D(f)(0,1) = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ geben mit

$$y - (0,1) \to 0 \Rightarrow \frac{f(y) - f(0,1) + (a,b)(y-x)}{\|y - (0,1)\|_2} \to 0$$

Betrachte $y_n = (1/n, 1)$ mit $y_n - x \to 0$. Es gilt

$$\frac{f(y_n) - f(0,1) + (a,b)(y_n - x)}{\|y_n - (0,1)\|_2} = \frac{1/n - 0 + a/n}{1/n} \to 1 + a$$

Damit das gegen Null konvergiert, muss $a = -1$. Wenn man aber $y_n = (-1/n, 1)$ mit $y_n - x \to 0$ betrachtet, gilt

$$\frac{f(y_n) - f(0,1) + (a,b)(y_n - x)}{\|y_n - (0,1)\|_2} = \frac{1/n - 0 - a/n}{1/n} \to 1 - a$$

Damit das gegen Null konvergiert, muss $a = 1$ sein. Damit kann es keine totale Ableitung (a,b) in $(0,1)$ geben.

☐ Das ist richtig, da f eine Hintereinanderausführung von stetigen Funktionen ist.

☐ Das ist falsch, denn der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h,1) - f(0,1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h| - 0}{h} (= \partial_1 f(0,1))$$

exisitiert nicht (links- und rechtsseitiger Grenzwert stimmen nicht überein). Die 1. partielle Ableitung nach x_2 würde aber existieren.

☐ Das ist richtig, denn

$$\partial_1 f(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,0)-f(1,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$\partial_2 f(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1,h)-f(1,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1$$

und damit $\nabla f(x_1,x_2) = (0,1)^\top$

2. Aufgabe:

a) Der Gradient ist

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 6xy + 3y^2 - 3 \\ -3x^2 + 6xy + 3y^2 - 21 \end{pmatrix}$$

Um die extremwertverdächtigen Stellen zu erhalten, muss man $3x^2 - 6xy + 3y^2 - 3 = 0, -3x^2 + 6xy + 3y^2 - 21 = 0$ lösen. Bei der Addition beider Gleichungen resultiert $y^2 = 4$. Also die beiden Lösungen $y = 2$ und $y = -2$. Für $y = 2$ reduzieren sich beiden Gleichungen zu quadratischen Gleichungen mit den Lösungen 3 und 1, bei $y = -2$ erhält man die Lösungen -3 und -1. Also sind die extremwertverdächtigen Stellen

$$(3,2),(1,2),(-3,-2),(-1,-2)$$

b) Es ist $\nabla f(x) = (2ax_1, 2bx_2)^\top$ und

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 2a, \lambda_2 = 2b$. Für alle Konstellationen gilt $\nabla f(0,0) = (0,0)^\top$, damit ist $(0,0)$ extremwertverdächtige Stelle. Für $(a,b) = (1,1)$ sind beide Eigenwerte der Hessematrix positiv $\Rightarrow$ lokales Minimum. Für $(a,b) = (-1,-1)$ sind beide Eigenwerte negativ, also liegt ein lokales Maximum vor. Für $(a,b) = (-1,1)$ hat man einen negativen und einen positiven Eigenwert, also einen Sattelpunkt.

3. Aufgabe:

a) Die Richtungsableitung gibt den Anstieg in Richtung e an. Der normierte Gradient $e_1 = \nabla f(x)/\left\|\nabla f(x)\right\|$ ist die Richtung, für die die Richtungsableitung maximal wird (steilster Anstieg) und analog gibt $e_2 = -e_1$ den minimalen Anstieg an.

b) Nach der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned} u'(x) = {} & \partial_x f(x,y,z)\big|_{y=g(x),z=h(x,x+1)} + \partial_y f(x,y,z)\big|_{y=g(x),z=h(x,x+1)} \cdot g'(x) \\ & + \partial_z f(x,y,z)\big|_{y=g(x),z=h(x,x+1)} \cdot \left(\partial_x h(x,y)\big|_{y=x+1} + \partial_y h(x,y)\big|_{y=x+1}\right) \end{aligned}$$

und damit bei $x = 1$

$$u'(1) = \partial_x f(1,2,3) + \partial_y f(1,2,3)\cdot g'(1) + \partial_z f(1,2,3)(\partial_x h(1,2) + \partial_y h(1,2))$$